Selected Quantitative Methods – Sommersemester 2022
Übung 1: Mathe-Wiederholung

Aufgabe 1.1

Man betrachte die Matrix
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\boldsymbol{A}'$. Ist $\boldsymbol{A}$ symmetrisch?

b) Ist $\boldsymbol{A}$ idempotent?

c) Bestimmen Sie die Determinante und den Rang von $\boldsymbol{A}$. Ist $\boldsymbol{A}$ eine invertierbare Matrix?

d) Berechnen Sie die Inverse von $\boldsymbol{A}$.

e) Berechnen Sie die Spur von $\boldsymbol{A}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{der Hauptdiagonalen}]{\text{spiegeln an}} A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Da $A \neq A'$ ist A keine symmetrische Matrix.

b) $AA \overset{?}{=} A$

$$AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 3 & 3\cdot 2 + 4\cdot 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow AA \neq A \Rightarrow A$ ist keine idempotente Matrix

c) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$$

Da $\det(A) \neq 0$ hat A vollen Rang

$\Rightarrow rg(A) = 2$ (A ist 2x2 Matrix)

Da A vollen Rang hat und quadratisch ist, ist A invertierbar. A^{-1} existiert

d) $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{-2}_{=\det(A)}} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

e) Spur = Summe der Hauptdiagonalelemente

$$Sp\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 + 4 = 5$$

Aufgabe 1.2

a) Es gelte folgende Gleichung:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Matrix **B**.

b) Betrachten Sie die beiden $(c \times 1)$-Vektoren $\boldsymbol{\delta}$ und $\boldsymbol{\gamma}$, sowie die beiden Matrizen $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{d \times c}$ und $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{c \times d}$.
Bestimmen Sie die Ordnung der folgenden Ausdrücke:
$\boldsymbol{XY}$, $\boldsymbol{YX}$, $\boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma\gamma}'$ sowie $\boldsymbol{\delta}'\mathbf{YX}\boldsymbol{\gamma}$.
Unter welchen Bedingungen existieren jeweils die Ausdrücke $\boldsymbol{Y}^{-1}$ und $\boldsymbol{\delta}'\mathbf{YX} + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{\gamma}$?

c) Bestimmen Sie $\mathrm{Sp}(\lambda \mathbf{R}'\mathbf{R})$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

a) $AB = C$ nach B auflösen

$$AB = C \quad | \cdot A^{-1} \text{ von links}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I_2} B = A^{-1}C$$

$$\Leftrightarrow B = A^{-1}C$$

A^{-1} existiert nur dann wenn $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow A$ ist invertierbar mit $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow B = A^{-1}C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b)
- $\underset{(d\times c)}{X}\,\underset{(c\times d)}{Y}$: $(d\times d)$-Matrix

- $\underset{(c\times d)}{Y}\,\underset{(d\times c)}{X}$: $(c\times c)$-Matrix

- $\underset{(1\times c)}{\gamma'}\,\underset{(c\times 1)}{\gamma}$: (1×1)-Matrix (reelle Zahl) (inneres Produkt)

- $\underset{(c\times 1)}{\gamma}\,\underset{(1\times c)}{\gamma'}$: $(c\times c)$-Matrix (äußere Produkt)

- $\underset{(1\times c)}{\delta'}\,\underset{(c\times d)}{Y}\,\underset{(d\times c)}{X}\,\underset{(c\times 1)}{\gamma}$: (1×1)-Matrix (reelle Zahl)

- Y^{-1} existiert nur falls Y quadratisch ist (d.h. $c=d$) und vollen Rang hat.

- $\underbrace{\underset{(1\times c)}{\delta'}\,\underset{(c\times d)}{Y}\,\underset{(d\times c)}{X}}_{1\times c} + \underbrace{\gamma'\gamma}_{1\times 1}$ Die Ordnungen $(1\times c)$ und (1×1) müssen übereinstimmen. D.h. es muss $c=1$ gelten.

c) $$\lambda R'R = \lambda \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda/4 & \frac{\sqrt{3}\lambda}{4} \\ \frac{\sqrt{3}\lambda}{4} & \frac{3\lambda}{4} \end{pmatrix}$$

$$Sp(\lambda R'R) = \frac{\lambda}{4} + \frac{3\lambda}{4} = \lambda\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = \lambda$$

Aufgabe 1.3

Sei $\boldsymbol{A}$ eine invertierbare Matrix der Ordnung $n \times n$. Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{A}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{A}'' + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{A}\right)\right)^{-1}.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} A^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{A''}_{=A} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}} A\right)\right)^{-1}$$

$$= \left(\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} A^{-1}\right)}_{=\sqrt{2}^{-1} A^{-1} = (\sqrt{2}A)^{-1}}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} A + \frac{1}{\sqrt{2}} A\right)}_{\frac{2}{\sqrt{2}} A = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} A = \sqrt{2}A}\right)^{-1}$$

$$= \left(\underbrace{(\sqrt{2}A)^{-1}(\sqrt{2}A)}_{I_n}\right)^{-1} = I_n^{-1} = I_n$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} A'' + \frac{\sqrt{2}}{2} A\right) = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{=\sqrt{2}} A$$

Aufgabe 1.4

Sei $\boldsymbol{X}$ eine Matrix der Ordnung $n \times k$ mit $\operatorname{rg}(\boldsymbol{X}) = k$, sei $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ und sei $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{P}$.

a) Bestimmen Sie die Ordnung der folgenden Matrizen: $\boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M}$

b) Welche Matrizen aus a) sind symmetrisch?

c) Welche Matrizen aus a) sind idempotent?

d) Bestimmen Sie die Spur von $\boldsymbol{I}_n$ und von $\boldsymbol{P}$.

a) • I_n: $(n \times n)$-Matrix

• $\underset{(k\times n)}{X'}\underset{(n\times k)}{X}$ $(k \times k)$-Matrix

• $P = \underset{(n\times k)}{X}\underbrace{(\underset{(k\times n)}{X'}\underset{(n\times k)}{X})^{-1}}_{(k\times k)}\underset{(k\times n)}{X'}$ $(n \times n)$-Matrix

• $M = \underset{(n\times n)}{I_n} - \underset{(n\times n)}{P}$ $(n \times n)$-Matrix

b) Symmetrie:

$(AB)' = B'A'$

$A'' = A$

• $I_n' = I_n$

• $(X'X)' = X'X'' = X'X$

• $P' = (\underbrace{X(X'X)^{-1}}_{A}\underbrace{X'}_{B})' = X''(X(X'X)^{-1})'$

$= X[\underbrace{((X'X)^{-1})'}_{((X'X)')^{-1} = (X'X)^{-1}}X'] = X(X'X)^{-1}X' = P$

$$\cdot\; M' = (I_n - P)' = \underbrace{I_n'}_{I_n} - \underbrace{P'}_{P} = I_n - P = M$$

$\Rightarrow$ alle vier Matrizen sind symmetrisch

$$((X'X)^{-1})' \underset{\substack{\uparrow \\ ()^{-1} \text{ und } ()' \\ \text{vertauschen}}}{=} ((X'X)')^{-1} = (X'\underbrace{X''}_{=X})^{-1} = (X'X)^{-1}$$

c) $\cdot\; I_n I_n = I_n \;\Rightarrow\; I_n$ ist idempotent

$\cdot\; (X'X)(X'X) \neq X'X$ (im Allgemeinen)

Gegenbeispiel: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow\; X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (X'X)(X'X) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \neq X'X$$

$$\cdot\; PP = X(X'X)^{-1}\underbrace{X' X(X'X)^{-1}}_{=I_k}X'$$

$$= X(X'X)^{-1} I_k X' = X(X'X)^{-1}X' = P$$

$\Rightarrow P$ ist idempotent

$$\cdot\; MM = (I_n - P)(I_n - P) = I_n I_n - I_n P$$

$$- P I_n + \underbrace{PP}_{=P \text{ (siehe oben)}} = I_n - P - P + P = I_n - P$$

$$= M$$

$\Rightarrow$ I_n, P und M sind idempotent,

$X'X$ jedoch nicht

d) $$Sp(I_n) = Sp\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(n \times n)} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ Elemente}} = n$$

$$Sp(P) = Sp(\underbrace{X(X'X)^{-1}}_{A}\underbrace{X'}_{B})$$

$$= Sp(X'X(X'X)^{-1})$$

$$= Sp(I_k)$$

$$= k$$

Rechenregel

$Sp(AB) = Sp(BA)$

$X'X$ Ordnung $(k \times k)$

Aufgabe 1.5
Sei $\boldsymbol{X}$ eine Matrix der Ordnung $n \times k$. Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ positiv semidefinit ist. Unter welcher Annahme ist $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ positiv definit?

<u>Positiv semidefinit</u>

$X'X$ Ordnung $k \times k$

zu zeigen: $c'(X'X)c \geq 0$ für alle Vektoren $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}^k$

$$c'X'Xc = (Xc)'(Xc)$$

$y := \underset{(n\times k)(k\times 1)}{Xc}$ $(n \times 1)$ $= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$= y'y$$

$$= \underbrace{y_1^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{y_n^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow$ $X'X$ ist positiv semidefinit

<u>Positiv definit</u>

zu zeigen: $c'(X'X)c > 0$ für alle Vektoren $c \neq 0$, $c \in \mathbb{R}^k$

$$c'X'Xc = (Xc)'Xc$$

$$Xc = [x_1, \dots, x_k] \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = c_1 \cdot x_1 + \dots + c_k \cdot x_k$$

(Linearkombination)

Spalten von X

Einträge von c

Sollte $Xc = 0$ gelten dann wären $x_1, \dots, x_k$ linear abhängig. Um das auszuschließen, nehmen wir an, dass X vollen Spaltenrang hat.

Dh.

$$\boxed{rg(X) = k} \quad (A2)$$

Dann ist $X'X$ positiv definit

Aufgabe 1.6

Sei $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, sei $\boldsymbol{X}$ eine Matrix der Ordnung $n \times k$ und sei $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^k$. Betrachten Sie die Funktion $f(\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})$. Bestimmen Sie

a) $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}$

b) $\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'}$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

Funktion $f(\beta) = (y - X\beta)'(y - X\beta)$

$$= y'y - y'X\beta - (X\beta)'y + (X\beta)'X\beta$$

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{X\beta}_{(n\times k)(k\times 1)})'}_{(1\times n)}\underbrace{y}_{(n\times 1)}}_{(1\times 1)}$$ hat Ordnung (1×1)

Eine (1×1)-Matrix ist immer symmetrisch.

Daher gilt $((X\beta)'y)' = (X\beta)'y$

(i) $(X\beta)'y \underset{\text{Symmetrie}}{\overset{\uparrow}{=}} ((X\beta)'y)' = y'X\beta$

(ii) $y'X\beta = (X'y)'\beta$

(iii) $(X\beta)'X\beta = \beta'X'X\beta$

$\Rightarrow f(\beta) = y'y - 2y'X\beta + \beta'X'X\beta$

$$= y'y - 2(X'y)'\beta + \beta'X'X\beta$$

<u>Ableitungsregel (i)</u>: $\dfrac{\partial a'\beta}{\partial \beta} = a$ <u>hier:</u> $\dfrac{\partial (X'y)'\beta}{\partial \beta} = X'y$

<u>Ableitungsregel (ii)</u>: $\dfrac{\partial \beta'A\beta}{\partial \beta} = 2A\beta$ (falls A symmetrisch ist) <u>hier:</u> $\dfrac{\partial \beta'(X'X)\beta}{\partial \beta} = 2(X'X)\beta$

$X'X$ ist symmetrisch (siehe Aufg. 1.4)

a) $$\frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} = \underbrace{\frac{\partial y'y}{\partial \beta}}_{=0} - 2\underbrace{\frac{\partial (X'y)'\beta}{\partial \beta}}_{=X'y} + \underbrace{\frac{\partial \beta'X'X\beta}{\partial \beta}}_{=2(X'X)\beta}$$

$$= 2X'X\beta - 2X'y$$

b) <u>Ableitungsregel (iii)</u>: $\dfrac{\partial^2 \beta'A\beta}{\partial \beta \partial \beta'} = 2A$ (falls A symmetrisch ist)

<u>hier:</u> $$\frac{\partial^2 \beta'(X'X)\beta}{\partial \beta \partial \beta'} = 2X'X$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f(\beta)}{\partial \beta \partial \beta'} = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta'}\left(y'y - 2(X'y)'\beta\right)}_{= \frac{\partial}{\partial \beta'}(-2X'y) = 0} + \underbrace{\frac{\partial^2 \beta'(X'X)\beta}{\partial \beta \partial \beta'}}_{=2X'X}$$

$$= 2X'X$$

Aufgabe 1.7

Gegeben seien die Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ und $Y_1, \ldots, Y_n$. Zeigen Sie die beiden Verschiebungssätze für die Stichprobenvarianz und Stichprobenkovarianz:

a) $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$

b) $s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}$

a) Stichprobenvarianz von X:

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \quad , \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2 X_i \cdot \overline{X} + \overline{X}^2\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}_{=\overline{X^2}} - 2\overline{X}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}_{=\overline{X}} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2}_{\frac{n}{n}\overline{X}^2 = \overline{X}^2}$$

$$= \overline{X^2} - 2 \cdot \underbrace{\overline{X} \cdot \overline{X}}_{=\overline{X}^2} + \overline{X}^2$$

$$= \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

b) Stichprobenkovarianz von X und Y:

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i \cdot Y_i - X_i \cdot \overline{Y} - \overline{X} \cdot Y_i + \overline{X} \cdot \overline{Y}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i}_{=\overline{XY}} - \overline{Y}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\overline{X}} - \overline{X}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i}_{\overline{Y}} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{X}\cdot\overline{Y}}_{\frac{n}{n}\overline{X}\cdot\overline{Y} = \overline{X}\cdot\overline{Y}}$$

$$= \overline{XY} - \overline{Y}\cdot\overline{X} - \overline{X}\cdot\overline{Y} + \overline{X}\cdot\overline{Y}$$

$$= \overline{XY} - \overline{X}\cdot\overline{Y}$$